

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Marcel Jena • Marian Andronache • Dinu Șerbănescu

MATEMATICĂ M1

MANUAL PENTRU CLASA A XI-a

art
educațional

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII

I. PERMUTĂRI	3
Noțiunea de permutare. Înmulțirea permutărilor	3
Proprietățile înmulțirii permutărilor	3
Inversiuni. Semnul unei permutări	4
II. MATRICE	9
Noțiunea de matrice. Mulțimi de matrice	9
Operații cu matrice	11
III. DETERMINANȚI	23
Noțiunea de determinant	23
Proprietățile determinanților	25
Calculul determinanților	29
IV. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE	37
Matrice inversabile în $M_n(\mathbb{C})$	37
Ecuații matriceale	40
Sisteme Cramer	42
Rangul unei matrice	44
Studiul compatibilității și rezolvarea sistemelor liniare	48
Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare	54
Aplicații ale determinanților în geometria analitică	56
Probleme recapitulative de algebră	59

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. LIMITE DE FUNCȚII	63
Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală, intervale	63
Mărginire, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$, dreapta încheiată, vecinătăți	65
Funcții reale de variabilă reală	68
Funcții raționale	71
Șiruri de numere reale, șiruri monotone, șiruri mărginite	77
Comportarea valorilor unei funcții cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată	80
Limita unui șir cu vecinătăți, șiruri convergente, proprietăți	80
Operații cu șiruri convergente sau care au limită	85
Operații cu șiruri care au limită, operații în $\overline{\mathbb{R}}$, nedeterminări	88
Limita șirurilor monotone, criteriul de convergență al lui Weierstrass	93
Trecerea la limită în inegalități, criteriile majorării și cleștelui	94
Numărul e , șirul $(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}$ cu $a_n \rightarrow 0$, $a_n \neq 0$	96
Alte metode pentru calculul limitelor de șiruri	101
Șiruri recurente	105
Limita unei funcții într-un punct, interpretare grafică	107
Operații cu limite de funcții. Limitele funcțiilor elementare	110
Calculul limitelor de funcții, cazuri exceptate	115
Criterii de existență a limitelor de funcții cu vecinătăți, cu limite laterale	120
Asimptote	123

II. CONTINUITATE	129
Interpretarea grafică a continuității unei funcții, continuitatea într-un punct și pe o mulțime	133
Operații cu funcții continue	133
Proprietatea lui Darboux, existența soluțiilor unor ecuații, semnul unei funcții continue	137
Legătura continuitate-mărginire	141
III. DERIVABILITATE	145
Probleme care conduc la conceptul de derivată	145
Derivabilitatea unei funcții într-un punct pe o mulțime, funcția derivată	145
Derivatele funcțiilor uzuale	147
Legătura continuitate-derivabilitate, derivate laterale	152
Operații cu funcții derivabile, reguli de derivare	154
Derivatele funcțiilor compuse	156
Derivata funcției inverse	158
Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct	161
Derivate de ordinul doi și de ordin superior	164
O aplicație: Rădăcinile multiple ale ecuațiilor polinomiale (extindere)	167
Puncte de extrem, Teorema lui Fermat	170
Teorema lui Rolle, Lagrange, Cauchy	173
Consecințe ale Teoremei lui Rolle. Șirurile lui Rolle	175
Consecințe ale Teoremei lui Lagrange, monotonia unei funcții	
calculul derivatei unei funcții într-un punct	177
Regulile lui L'Hospital	181
Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor, puncte de extrem, monotonie	186
Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor, concavitate, puncte de inflexiune	189
IV. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR	193
Reprezentarea grafică a ecuațiilor, utilizarea graficelor în determinarea numărului de soluții ale unei ecuații	198
Conicele ca locuri geometrice remarcabile	201
Reprezentarea grafică a conicelor	205
Probleme recapitulative de analiză	209
SOLUȚII	213

NOȚIUNEA DE PERMUTARE ÎNMULȚIREA PERMUTĂRIILOR

Am văzut în clasa a X-a că o **permutare** a unei mulțimi nevide A este o funcție bijectivă definită pe A cu valori în A , iar dacă mulțimea A are n elemente, atunci numărul permutărilor sale este $n!$.

Vom folosi noțiunea de permutare pentru definirea, în capitolul „Determinanți”, a unei caracteristici numerice, numită determinantul unei matrice. Pentru acest scop este suficient să considerăm permutările mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm mulțimea acestor permutări cu S_n și o numim **mulțimea permutărilor de gradul n** .

De obicei, o permutare $\sigma \in S_n$ se notează printr-un tablou de tipul:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prin această scriere, **compunerea** permutărilor (pe care o notăm multiplicativ) se face foarte ușor.

Astfel, dacă $\sigma, \tau \in S_n$ iar $\tau(i) = j$, $\sigma(j) = k$, atunci $(\sigma \circ \tau)(i) = (\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(j) = k$, deci compunerea se face după următoarea „schemă”:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & k & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & j & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & k & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

De exemplu, dacă $\sigma, \tau \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Datorită notației multiplicative, această operație se numește **înmulțirea** permutărilor. Deoarece injectivitatea și surjectivitatea sunt păstrate prin compunere, rezultă că prin înmulțirea a două elemente din S_n obținem un element din S_n .

PROPRIETĂȚILE ÎNMULȚIRII PERMUTĂRIILOR

Am văzut în clasele a IX-a și a X-a că, pe mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime nevidă A cu valori în A , compunerea funcțiilor este asociativă, funcția $1_A : A \rightarrow A$ cu $1_A(x) = x$, $x \in A$ este element neutru și orice funcție bijectivă este inversabilă.

În consecință, înmulțirea permutărilor are, pe S_n , proprietățile:

a) este asociativă, deci $(\sigma\tau)\varphi = \sigma(\tau\varphi)$, $\forall \sigma, \tau, \varphi \in S_n$.

b) are element neutru, anume permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$,

deci $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall \sigma \in S_n$.

c) orice permutare este inversabilă, deci pentru $\sigma \in S_n$ există $\sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e$; permutarea σ^{-1} se numește *inversa* permutării σ .

Observații. 1) Pentru $\sigma \in S_n$, permutarea σ^{-1} se obține schimbând locul celor două linii din tabloul care definește permutarea σ .

De exemplu, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Înmulțirea permutărilor pe S_n , $n \geq 3$ nu este comutativă, deci, în general, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ pentru $\sigma, \tau \in S_n$.

În situația particulară în care, pentru permutările $\sigma, \tau \in S_n$, avem $\sigma\tau = \tau\sigma$, vom spune că cele două permutări comută.

3) Proprietățile înmulțirii permutărilor ne permit să definim, pentru o permutare $\sigma \in S_n$, puterile întregi ale lui σ , astfel:

$$\sigma^k = \begin{cases} \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdot \dots \cdot \sigma}_{k \text{ ori}}, & \text{pentru } k \in \mathbb{N}^* \\ e, & \text{pentru } k = 0 \\ (\sigma^{-k})^{-1}, & \text{pentru } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Din această definiție rezultă că $\sigma^k \cdot \sigma^p = \sigma^{k+p}$ și $(\sigma^k)^p = \sigma^{kp}$, $\forall k, p \in \mathbb{Z}$.

Dacă $\sigma, \tau, \varphi \in S_n$ avem echivalențele:

$$a) \sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$$

$$b) \tau\sigma = \varphi\sigma \Leftrightarrow \tau = \varphi$$

Într-adevăr, $\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \sigma^{-1}(\sigma\tau) = \sigma^{-1}(\sigma\varphi) \Leftrightarrow (\sigma^{-1}\sigma)\tau = (\sigma^{-1}\sigma)\varphi \Leftrightarrow e \cdot \tau = e \cdot \varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$ și analog pentru echivalența de la punctul b).

Echivalențele a) și b) stabilesc reguli de simplificare la stânga și la dreapta pentru înmulțirea permutărilor.

INVERSIUNI, SEMNUL UNEI PERMUTĂRI

Pentru o permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, o pereche ordonată (i, j) cu $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ în care $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$ se numește *inversiune* a lui σ .

De exemplu, inversiunile permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ sunt perechile $(2, 3)$, $(2, 4)$ și $(3, 4)$,

pentru că $\sigma(2) = 4 > 3 = \sigma(3)$, $\sigma(2) = 4 > 2 = \sigma(4)$ și $\sigma(3) = 3 > 2 = \sigma(4)$.

Permutările care au un număr par de inversiuni se numesc *permutări pare*, iar cele care au un număr impar de inversiuni se numesc *permutări impare*.

Pentru $\sigma \in S_n$, considerăm numărul rațional $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ care, datorită proprietăților date

de propoziția ce urmează, se numește *semnul* permutării σ .

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$ dacă σ este permutare pară și $\varepsilon(\sigma) = -1$ dacă σ este permutare impară.

Demonstrație. Deoarece σ este bijectivă avem $\prod_{i \neq j} (\sigma(i) - \sigma(j)) = \prod_{\sigma^{-1}(k) \neq \sigma^{-1}(p)} (k - p) = \prod_{k \neq p} (k - p) = \prod_{i \neq j} (i - j)$.

$$\begin{aligned} \text{Atunci } (\varepsilon(\sigma))^2 &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \frac{\prod_{i \neq j} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{i \neq j} (i - j)} = 1, \text{ deci } |\varepsilon(\sigma)| = 1. \end{aligned}$$

Deoarece o pereche (i, j) cu $i < j$ este inversiune a lui σ dacă și numai dacă fracția $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ este

negativă, rezultă din definiția lui $\varepsilon(\sigma)$, că semnul lui este dat de numărul inversiunilor lui σ . În concluzie, dacă σ este pară atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$, iar dacă σ este impară $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Comportarea lui ε față de produsul permutărilor este evidențiată de următoarea propoziție.

Propoziție

1°. $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau)$, $(\forall) \sigma, \tau \in S_n$.

2°. $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, $(\forall) \sigma \in S_n$.

Demonstrație. 1°. Din definiția lui ε rezultă că:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma\tau)(i) - (\sigma\tau)(j)}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} \cdot \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \\ &= \prod_{1 \leq k < p \leq n} \frac{\sigma(k) - \sigma(p)}{k - p} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

2°. Deoarece permutarea e nu are inversiuni, rezultă că $\varepsilon(e) = 1$ și în consecință $\varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(e) = 1$, deci $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Vom pune acum în evidență un tip particular de permutare, necesar în studiul proprietăților determinanților din capitolul 3.

O permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$ se numește **transpoziție** dacă există $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $i \neq j$ astfel încât $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ și $\sigma(k) = k$ pentru orice $k \notin \{i, j\}$. Vom nota transpoziția σ cu (i, j) , deci $(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$.

De exemplu, în S_5 avem $(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $(5, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietățile transpozițiilor sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$ o transpoziție. Atunci:

1°) $\sigma = \sigma^{-1}$.

2°) $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Demonstrație. 1°) Dacă $\sigma = (i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$, atunci

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix} = (j, i) = (i, j) = \sigma.$$

2°) Dacă $i < j$ atunci inversiunile lui $\sigma = (i, j)$ sunt perechile: $(i, i+1)$, $(i, i+2)$, ..., (i, j) , $(i+1, j)$, $(i+2, j)$, ..., $(j-1, j)$, deci σ are $2(j-i) - 1$ inversiuni. În concluzie σ este impară, deci $\varepsilon(\sigma) = -1$.

1. Să se calculeze produsul $\sigma\tau$ în fiecare din cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

2. Să se precizeze inversiunile și semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

3. Să se determine semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix},$ unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2;$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix},$ unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

4. Să se scrie inversele permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix},$ unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

5. Să se rezolve ecuația $\sigma x = \tau$ în următoarele cazuri:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Soluție: Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$ atunci $x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

6. Să se rezolve ecuația $\sigma x \tau = \theta$ în următoarele cazuri

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Soluție. Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ rezultă că

$$x = \sigma^{-1} \theta \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e.$$

$$\text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Să se arate că permutarea σ^2 este pară, oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$ natural.

8. Să se arate că nu există permutări $\sigma \in S_4$ astfel încât $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Să se rezolve ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Să se determine toate permutările $x \in S_3$ care comută cu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și toate permutările $y \in S_4$ care

$$\text{comută cu } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{a) } x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. Să se precizeze numărul de transpoziții din S_n , $n \geq 2$.

13. Să se arate că: $(12)(34) = (34)(12)$ în S_n , $n \geq 4$.

14. Să se verifice că în S_n avem egalitățile:

$$\text{a) } (ij) = (1\ i)(1\ j)(1\ i); \quad \text{b) } (1\ i)(1\ j)(1\ i) = (1\ j)(1\ i)(1\ j); \quad \text{c) } (ij) = (1\ i)(ij)(1\ j), \text{ oricare ar fi } i, j \in \{2, 3, \dots, n\} \text{ cu } n \geq 3 \text{ și } i \neq j.$$

15. Fie $n \geq 2$ un număr natural. O submulțime nevidă H a lui S_n se numește *închisă* dacă $\sigma\tau \in H$ pentru orice permutări $\sigma, \tau \in H$.

Considerăm H o submulțime închisă a lui S_n și σ o permutare din H .

a) Să se arate că $\{\sigma^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H$.

b) Să se demonstreze că există numerele întregi $k < \ell$ astfel încât $\sigma^k = \sigma^\ell$.

c) Să se arate că pentru orice permutare $\varphi \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $\varphi^p = e$.

d) Să se arate că $e \in H$.

e) Să se arate că dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

16. Să se calculeze σ^{2010} în următoarele cazuri:

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

17. Fie $\sigma \in S_{2006}$. Să se arate că $f: \{1, 2, \dots, 2006\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2006\}$, $f(i) = 2007 - \sigma(i)$ este o permutare din S_{2006} , având semnul opus lui σ .

Testul 1

Rezolvați:

1. Fie $\sigma \in S_{10}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine paritatea lui σ .

b) Să se descompună σ în produs de transpoziții.

c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\sigma^k = e$.

2. Fie $\sigma, \tau \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze σ^6 și τ^2 .

b) Să se rezolve ecuația $\sigma^{2004} \cdot x = \tau^{2006}$, $x \in S_4$.

c) Să se arate că ecuația $\sigma^{2004} \cdot x^2 = \tau^{2007}$ nu are soluții în S_4 .

3. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_{10}$ pentru care

$$\sum_{i=1}^{10} a_i a_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{10} a_i a_{\tau(i)}, \text{ oricare ar fi } \tau \in S_{10}.$$

Testul 2

Indicați răspunsul corect.

1. Câte inversiuni are permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 & \dots & 16 \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 15 & 2 & 4 & \dots & 16 \end{pmatrix}$.

a) 28; b) 29; c) 30; d) 32.

2. Câte soluții are în S_5 ecuația $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$?

a) 0; b) 1; c) 4; d) 8.

3. Câte permutări din S_5 comută cu permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$?

a) 8; b) 6; c) 4; d) 2.

NOȚIUNEA DE MATRICE MULTIMI DE MATRICE

În diverse activități legate de reprezentare, analiza și optimizarea desfășurării anumitor procese de natură tehnică sau economică, în studiul probabilistic sau statistic al unor fenomene, în general în activități care presupun analiza unui număr însemnat de informații, apare necesitatea concentrării datelor în tablouri numite matrice.

În rezolvarea sistemelor liniare, matricele (tablourile coeficienților ecuațiilor) vor constitui principalul instrument de lucru. Prin introducerea operațiilor cu matrice, acestea vor putea fi privite ca „numere generalizate” cu ajutorul cărora vom contoriza soluțiile acestor sisteme.

Să considerăm următorul caz practic:

Situația vânzărilor de carte la o anumită editură, în patru orașe, într-o perioadă de timp determinată, este prezentată în tabelul de mai jos, în care sunt specificate orașul, tipul de carte și numărul exemplarelor vândute din fiecare tip.

Tipul de carte \ Orașul	Beletristică	Socio-politică	Știință	Tehnică	Didactică
Orașul A	120	15	42	10	400
Orașul B	90	21	10	5	212
Orașul C	87	10	25	11	308
Orașul D	410	12	14	17	197

Din acest tabel se pot extrage cu ușurință informații legate de vânzarea unui anumit tip de carte (prin citirea tabelului pe coloane) sau de situația generală a vânzărilor dintr-un anumit oraș (prin citirea tabelului pe linii).

În cazul în care ordonarea orașelor precum și ordonarea tipurilor de carte sunt fixate, situația vânzărilor poate fi prezentată sub forma următorului tabel matriceal:

$$\begin{pmatrix} 120 & 15 & 42 & 10 & 400 \\ 90 & 21 & 10 & 5 & 212 \\ 87 & 10 & 25 & 11 & 308 \\ 410 & 12 & 14 & 17 & 197 \end{pmatrix}$$

Poziția fiecărui număr din tabel este fixată de numărul liniei și al coloanei pe care se află. De exemplu, numărul 11 este situat pe linia 3 și coloana 4, deci reprezintă numărul de cărți tehnice vândute în orașul C.

Definiție

Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe și $m, n \in \mathbb{N}^*$. Se numește **matrice cu m linii și n coloane**, sau **matrice de tip (m, n)** o funcție

$$f : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dacă $a_{ij} \in \mathbb{C}$ reprezintă imaginea perechii (i, j) cu $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, atunci cele $m \cdot n$ imagini ale lui f se aranjează într-un tablou de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Această aranjare justifică denumirea funcției f de matrice cu m linii și n coloane. Cum orice funcție $f : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ este perfect determinată de tabloul imaginilor sale, vom numi matrice de tip (m, n) un tablou A de forma (1).

Numerele a_{ij} cu $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ se numesc elementele matricei A . Cum elementul a_{ij} situat pe linia i și coloana j ale tabloului A reprezintă imaginea perechii (i, j) rezultă că scrierea unei matrice este unică.

Înlocuind, în definiție, mulțimea $\mathbb{C}$ cu una din mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ obținem noțiunea de matrice de tipul (m, n) peste $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ și respectiv peste $\mathbb{R}$.

Liniile matricei A sunt mulțimile ordonate scrise „pe orizontală”:

$$L_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$L_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

$$\dots\dots\dots$$

$$L_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}),$$

iar coloanele matricei A sunt mulțimile ordonate „scrise pe verticală”:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dacă } L_1, L_2, \dots, L_m \text{ sunt liniile lui } A \text{ și } C_1, C_2, \dots, C_n \text{ coloanele lui } A \text{ atunci scriem: } A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix} \text{ sau } A = (C_1, C_2, \dots, C_n).$$

O matrice de tip $(1, n)$ se numește **matrice linie**.

O matrice de tip $(m, 1)$ se numește **matrice coloană**.

O matrice de tip (n, n) se numește **matrice pătratică de ordin n** sau, mai scurt, **matrice de ordin n** .

Notăm: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) =$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) peste $\mathbb{C}$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) =$ mulțimea matricelor de ordin n peste $\mathbb{C}$.

În mod analog definim mulțimile: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ și $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

O notație concentrată pentru matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sau, mai scurt, $A = (a_{ij})$. În acest ultim caz, tipul matricei rezultă din precizarea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ sunt egale dacă sunt de același tip (deci $m = p$, $n = q$) și $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ atunci mulțimea ordonată $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ se numește **diagonala principală** a lui A , iar mulțimea ordonată $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1})$ se numește **diagonala secundară** a lui A . Suma elementelor de pe diagonala principală a lui A se numește **urma matricei A** și se notează $\text{tr } A$. Deci $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci matricea obținută din A prin schimbarea „liniilor în coloane” și invers, se numește **transpusa lui A** și se notează A' . Se observă că $A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.

EXEMPLU: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$. Atunci $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$.

1. Adunarea matricelor

Considerăm următoarea situație practică:

O firmă de construcții deține două întreprinderi A și B , a căror structură de personal este prezentată în cele două tabele de mai jos, pe funcții și categorii de vârstă:

A	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	0	2	41
25 – 40 ani	12	4	11	79
40 – 65 ani	10	7	5	102

B	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	1	1	14
25 – 40 ani	8	5	10	83
40 – 65 ani	4	1	4	81

Structura angajaților firmei este dată de tabelul:

$A+B$	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	1	3	55
25 – 40 ani	20	9	21	162
40 – 65 ani	14	8	9	183

obținut prin adunarea numerelor din cele două tabele situate pe aceeași linie și aceeași coloană. Pe scurt, putem scrie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 41 \\ 12 & 4 & 11 & 79 \\ 10 & 7 & 5 & 102 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 14 \\ 8 & 5 & 10 & 83 \\ 4 & 1 & 4 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 55 \\ 20 & 9 & 21 & 162 \\ 14 & 8 & 9 & 183 \end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$. Matricea $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $C = (a_{ij} + b_{ij})$ se numește **suma** matricelor A și B și se notează $A + B$.

Operația prin care fiecărei perechi $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea $A + B$ se numește **adunarea matricelor**.

EXEMPLU: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

Observații:

1. Adunarea a două matrice se poate efectua numai dacă sunt de același tip (m, n) . Suma lor este tot o matrice de tipul (m, n) și, de aceea, spunem că adunarea matricelor este operație algebrică sau lege de compoziție pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2. Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ atunci $A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Proprietatea se păstrează dacă înlocuim mulțimea $\mathbb{Z}$ cu una din mulțimile $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$.

Matricea de tip (m, n) ale cărei elemente sunt toate egale cu zero se numește **matricea nulă de tip (m, n)** și se notează $\mathbb{O}_{m, n}$.

În cazul în care $m = n$, această matrice se notează $\mathbb{O}_n$.

Pentru o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$, matricea „ $-A$ ” $= (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ se numește **opusa** matricei A .

Proprietățile adunării matricelor pe $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ sunt imediate și sunt evidențiate în următoarea propoziție:

Propoziție

Sunt adevărate proprietățile:

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (adunarea matricelor este asociativă).
- 2) $A + B = B + A$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (adunarea matricelor este comutativă).
- 3) $A + \mathbb{O}_{m, n} = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (matricea nulă este element neutru al adunării matricelor).
- 4) $A + (-A) = \mathbb{O}_{m, n}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (orice matrice are o opusă față de adunare).

Demonstrația poate constitui o temă facilă și în același timp utilă. Cele patru proprietăți rămân adevărate în cazul înlocuirii mulțimii $\mathbb{C}$ cu una din mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$.

Proprietățile anterioare conferă fiecăreia din mulțimile $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Q})$ și $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Z})$, înzestrare cu adunarea, o „structură algebrică” numită grup abelian.

Regulile de calcul relative la adunarea matricelor sunt, datorită acestei structuri de grup abelian, identice cu cele de la adunarea numerelor.

De exemplu, asociativitatea adunării ne permite ca pentru $A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ și $p \in \mathbb{Z}$, să folosim notațiile:

$$pA = \begin{cases} \underbrace{A + A + \dots + A}_{p \text{ ori}}, & \text{dacă } p \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{O}_{m, n}, & \text{dacă } p = 0 \\ -(-pA), & \text{dacă } p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Următoarele egalități sunt adevărate:

$$(p + q)A = pA + qA \text{ și } p(qA) = (pq)A, \forall A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C}), p, q \in \mathbb{Z}.$$

Dacă pentru $A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ notăm, ca la numere, matricea $A + (-B)$ cu $A - B$, atunci, într-o egalitate matriceală putem trece o matrice dintr-un membru în altul, cu „semn schimbat”. Adică $A + B = C \Leftrightarrow (A + B) + (-B) = C + (-B) \Leftrightarrow A + (B + (-B)) = C - B \Leftrightarrow A + \mathbb{O}_{m, n} = C - B \Leftrightarrow A = C - B$.

2. Înmulțirea matricelor cu scalari

Considerăm următoarea situație practică:

Un depozit de alimente aprovizionează magazinele X și Y , într-o săptămână, cu diverse cantități din alimentele a , b și c exprimate în kilograme, după tabelul de mai jos:

	a	b	c
X	1200	600	300
Y	1500	840	420

În urma scumpirii acestor alimente consumul pe fiecare din cele trei alimente a scăzut cu o treime. Noul tabel cu necesarul de aprovizionare al celor două magazine este: